EXAME DE QUALIFICAÇÃO
ELETROMAGNETISMO
Evandro A. Gouveia
__/07/2006

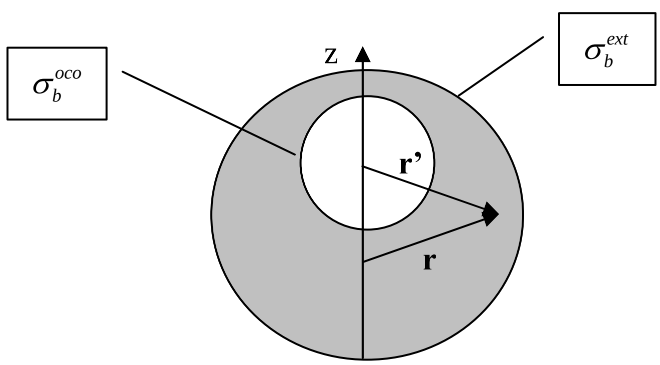
Duração 5:00 Horas

1. ***(3,0 pontos)*** Considere uma esfera dielétrica classe A (ver nota de rodapé)[1] com permissividade elétrica relativa ε_r e raio *R*. Ela possui um oco de raio *a* com centro em *(x,y,z)* = *(0,0,z$_o$)* A esfera está inicialmente descarregada e, então, coloca-se uma carga pontual *Q* no centro. Considere a figura abaixo e mostre que as densidades superficiais de cargas induzidas são:

$$\sigma_b^{ext}(\theta) = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi R^2}\left\{1 - \frac{1 - \frac{z_o}{R}\cos\theta}{\left[1 + (z_o/R)^2 - 2(z_o/R)\cos\theta\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\sigma_b^{oco}(\theta') = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi a^2}\left\{1 - \frac{1 + \frac{z_o}{a}\cos\theta'}{\left[1 + (z_o/a)^2 + 2(z_o/a)\cos\theta'\right]^{3/2}}\right\}$$

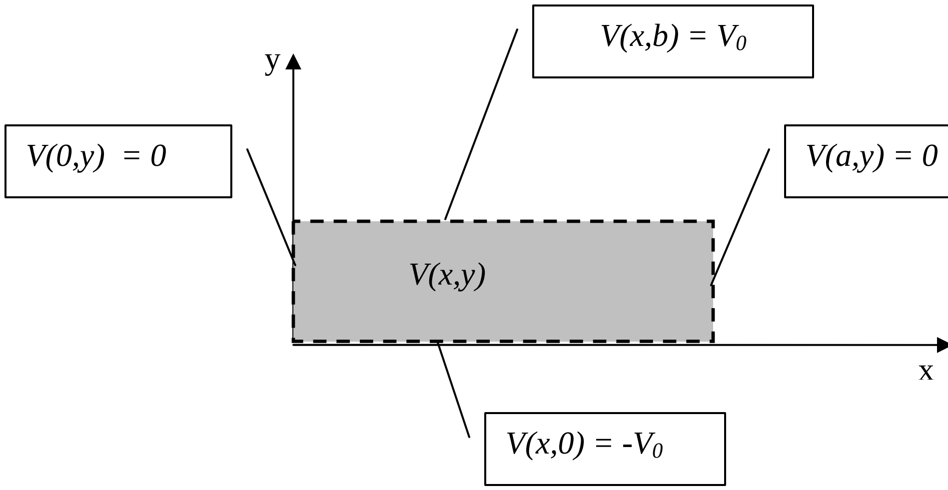
Onde θ e θ' são os ângulos entre o eixo *z* e os vetores **r** e **r´**, respectivamente.



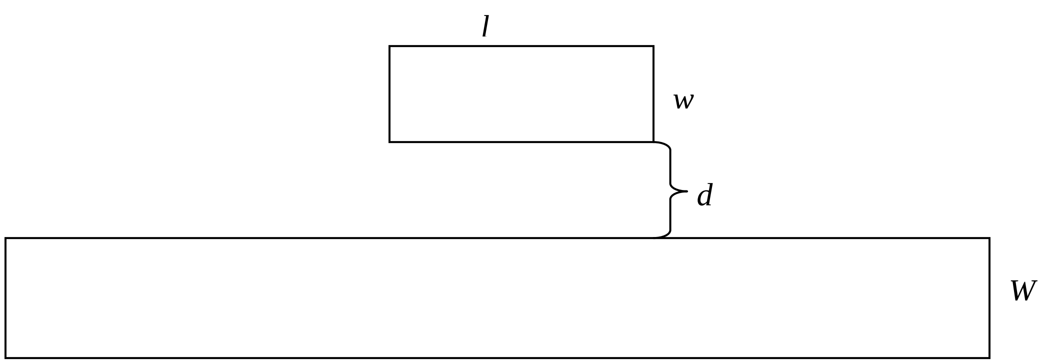
2. ***(2,5 pontos)*** Considere um potencial bidimensional conforme a figura abaixo. As linhas pontilhadas representam superfícies condutoras. Não há densidade volumétrica de cargas em todo o espaço, ou seja, o potencial satisfaz a eq. de Laplace. Use o método de separação de variáveis e determine o potencial eletrostático *V(x,y)* na região indicada.

---

[1] Um dielétrico Classe A é isotrópico, homogêneo e obedece uma relação linear $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ em que a permissividade elétrica relativa ε_r independe das coordenadas.



3. ***(2,5 pontos)*** Considere uma espira retangular de largura *W* e comprimento muito longo. Esta espira é colocada no mesmo plano junto à outra espira retangular de largura *w* e comprimento *l*. Os lados paralelos mais próximos estão separados por uma distância *d* conforme na figura abaixo. Sabendo-se que a indutância mútua entre dois circuitos M_{12} é a razão entre o fluxo magnético de um circuito sobre o outro Φ_{12} e a corrente que gerou esse fluxo I_1, ou seja: $M_{12} = \Phi_{12} / I_1 = \Phi_{21} / I_2$, determine a indutância mútua entre as duas espiras.



4. ***(2,0 pontos)*** Considere luz com incidência normal numa interface entre dois meios não condutores e não magnéticos (ar/vidro, por exemplo). O índice de refração no meio incidente é *n*, enquanto o meio de transmissão tem índice de refração *n+a*. Sabendo-se que as amplitudes complexas dos campos elétricos estão relacionadas através dos índices de refração por $E_t = \left(\frac{2n_i}{n_i + n_t}\right) E_i$, onde *i/t* refere-se a incidente/transmitido, e que o coeficiente de transmissão *T* é a razão entre as componentes do valor médio do vetor de Poynting na direção de propagação, determine *T*.

FORMULÁRIO
(Sistema de Unidades Internacional)

1. Vetor Indução Magnética **B,** Polarização **P**, Magnetização **M**, momento magnético **m**, Potencial Elétrico V, vetor deslocamento elétrico **D** e vetor campo elétrico **E**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\left[\int_{\tau'} \frac{\left(\mathbf{J}_f + \nabla'\times\mathbf{M}\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}d\tau' + \int_{S'} \frac{\left(\boldsymbol{\lambda}_f + \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}'\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}da' + \int_C \frac{I\,d\mathbf{l}'\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{J}_f\,d\tau + \frac{1}{2}\int_S \mathbf{r}\times\boldsymbol{\lambda}_f\,da + \frac{1}{2}\oint_C I\mathbf{r}\times d\mathbf{l}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_{\tau'} \frac{\rho_f - \nabla'\cdot\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau' + \int_{S'} \frac{\sigma_f + \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}da'\right]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}'$ é um vetor unitário normal ao elemento de área, I é a corrente elétrica num fio fino, $\mathbf{J}_f$ e $\boldsymbol{\lambda}_f$ são as densidades de corrente volumétrica e superficial devido às cargas livres, respectivamente, ρ_f e σ_f são as densidades de cargas livres volumétrica e superficial, respectivamente, $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\,NA^{-2}$ é a permeabilidade do vácuo e ε_o é a permissividade do vácuo.

2. Potencial Vetor de um dipolo magnético **m e** Potencial Elétrico de um dipolo elétrico **p**

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

3. Integrais úteis com polinômios de Legendre $P_n(x)$ de ordem n e função delta de Cronecker $\delta_{nl} = \begin{cases} 1, \text{se } \mathrm{n} = l \\ 0, \text{se } \mathrm{n} \neq l \end{cases}$.

$$P_n\left(-x\right) = \left(-1\right)^n P_n\left(x\right)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_l(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nl}$$

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 \; se \; n = 0 \\ 0 \; se \; n = 2,4,6\ldots \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} \; se \; n = 1,3,5\ldots \end{cases}$$

4. Relações úteis

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$
$$\nabla \times (f\,\mathbf{a}) = \nabla f \times \mathbf{a} + f \nabla \times \mathbf{a}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

5. Miscelâneas

5.1. Solução da eq. de Laplace em coordenadas Esféricas com independência azimutal

$$f(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta)$$

5.2. Solução da eq. de Laplace em coordenadas Cilíndricas no plano $x - y$

$$f(\rho,\varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{\substack{l=1 \\ m=0}}^{\infty} \left(A_l \rho^l + B_l \rho^{-l} \right)\left(C_m e^{im\varphi} + D_m e^{-im\varphi} \right)$$

6. Outras Integrais

$$\int_{-1}^{1} dx \frac{1+bx^2}{\left(1+a^2-2ax\right)^{3/2}} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+b\left(1+2a^2\right)}{1-a^2} \right), & -1 < a < 1 \\ \dfrac{2}{3|a|^3}\left(\dfrac{3a^2+b\left(2+a^2\right)}{a^2-1} \right), & |a| > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} dx \frac{1+bx}{\left(1+a^2-2ax\right)^{3/2}} = \begin{cases} 2\left(\dfrac{1+ab}{1-a^2}\right), & -1<a<1 \\ \dfrac{2}{a^2}\left(\dfrac{a+b}{a^2-1}\right), & |a|>1 \end{cases}$$

$$\int_0^B dx\, sen\left(\frac{n\pi}{B}x\right) sen\left(\frac{p\pi}{B}x\right) = \int_0^B dx \cos\left(\frac{n\pi}{B}x\right)\cos\left(\frac{p\pi}{B}x\right) = \frac{B}{2}\delta_{np}$$

$$\int_0^B dx\, sen\left(\frac{n\pi}{B}x\right) = \frac{B}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\int_0^B dx \cos\left(\frac{n\pi}{B}x\right) = B\delta_{n0}$$